

## RISOLUZIONE ESERCIZI SUL CALCOLO COMBINATORIO

A) **SVILUPPARE E CALCOLARE LE SEGUENTI ESPRESSIONI** :

numero	esercizio	risoluzione
1)	$D_{3,2}$	$3 \cdot 2 = 6$
2)	$P_4$	$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
3)	$P_6^3$	$\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$
4)	$P_6^{3,3}$	$\frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$
5)	$D'_{3,2}$	$3^2 = 9$
6)	$C_{4,2}$	$\binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$
7)	$C_{n,n}$	$\binom{n}{n} = 1$
8)	$D_{4,3} + D'_{2,3} - C_{3,2}$	$24 + 8 - 3 = 29$
9)	$\binom{3}{2} + \binom{7}{0} - \binom{2}{2}$	$3 + 1 - 1 = 3$
10)	$\binom{20}{18}$	$\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$
11)	$\binom{90}{86} \cdot 4!$	$\binom{90}{86} \cdot 4! = \binom{90}{4} \cdot 4! = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{4!} \cdot 4! = 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87$
12)	$P_6^5 - P_3 + P_5^{3,2}$	$6 - 6 + 10 = 10$
13)	<p>Determinare per quali valori di x sono vere le seguenti eguaglianze:</p> <p>a) <math>\binom{5}{x} = 5</math>;      b) <math>\binom{n}{x} = 1</math></p>	<p>a) <math>x = 1; x = 4</math></p> <p>b) <math>x = 0; x = n</math></p>

B) **RISPONDERE ALLE SEGUENTI DOMANDE INSERENDO LA LETTERA ( IN FORMATO MAIUSCOLO ) RITENUTA ESATTA:**

14) **E** Il simbolo  $C_{n,k}$  è uguale a :

- A)  $\binom{k}{n}$ ;      B)  $\frac{D_{n,k}}{n!}$ ;      C)  $\frac{D_{n,k}}{(n-k)!}$ ;      D)  $\frac{D'_{n,k}}{k!}$ ;      E) nessuna delle precedenti.

15) **B** Si lanciano tre monete . I gruppi di “terne” che si possono costituire possono essere definiti:

- A) disposizioni semplici; B) disposizioni con ripetizione; C) permutazioni con elementi ripetuti;  
D) combinazioni semplici; E) nessuna delle precedenti.

16) **A** La sigla di un'azienda di trasporto è composta da 5 lettere di cui una ripetuta. Un corriere deve consegnare un plico alla ditta ma ricorda solo che la prima lettera della sigla è quella ripetuta. Le sigle che potrà formare con le lettere rimanenti saranno:

- A) permutazioni semplici; B) disposizioni con ripetizione; C) permutazioni con elementi ripetuti;  
D) combinazioni semplici; E) nessuna delle precedenti.

17) **A** Nelle permutazioni semplici il simbolo k sarà :

- A) uguale a n;      B) minore di n;      C) uguale a 1;      D) uguale a 0 ;      E) nessuna delle precedenti.

18) **C** Nelle combinazioni semplici , se  $k=n$  i gruppi che si potranno formare saranno uguali a :

- A) n;      B) k;      C) 1;      D) 0 ;      E) nessuna delle precedenti.

19) **B** Nelle disposizioni con ripetizione , se  $k=n$ , i gruppi che si potranno formare saranno uguali a :

- A) n;      B)  $n^n$ ;      C)  $n^2$  ;      D)  $k^2$  ;      E) nessuna delle precedenti.

20) **C** L'espressione  $D_{10,3}$  si sviluppa come :

- A) prodotto di 3 fattori crescenti partendo dal 10;      B) prodotto di 10 fattori decrescenti partendo dal 10;  
C) prodotto di 3 fattori decrescenti partendo dal 10;      D) somma di tre fattori decrescenti partendo dal 10;  
E) nessuna delle precedenti.

21) **B** L'espressione  $D'_{2,5}$  si sviluppa come :

- A) prodotto di 2 fattori entrambi uguali a 5;      B) prodotto di 5 fattori tutti uguali a 2;  
C) prodotto di 2 fattori decrescenti partendo dal 5;      D) prodotto del numero 2 per il numero 5;  
E) nessuna delle precedenti.

22) **E** L'espressione  $P_6^5$  è uguale a :

- A) 6!;      B) 1;      C) 5;      D)  $6^5$ ;      E) nessuna delle precedenti.

- 23) **D** L'espressione  $D_{3,3}$  è uguale a :  
 A) 27;      B) 9;      C) 1;      D) 6;      E) nessuna delle precedenti.
- 24) **B** L'espressione  $\binom{20}{19}$  è uguale a :  
 A) 380;      B) 20;      C) 1;      D) 190;      E) nessuna delle precedenti.
- 25) **B** Una giuria deve assegnare 3 premi diversi ai primi 3 classificati. Se i concorrenti sono in numero di  $n$  i gruppi possibili dei primi tre classificati saranno uguali a :  
 A)  $D'_{n,3}$ ;      B)  $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ ;      C)  $3!$ ;      D)  $n!$ ;      E) nessuna delle precedenti.
- 26) **D** Uno studente deve compilare un questionario di 4 domande, rispondendo "vero" o "falso". Il numero dei modi possibili in cui può compilarlo rappresentano :  
 A) disposizioni semplici;      B) permutazioni semplici;  
 C) permutazioni con elementi ripetuti;      D) disposizioni con ripetizione;  
 E) nessuna delle precedenti.
- 27) **E** Nelle disposizioni semplici il simbolo  $k$  sarà :  
 A) necessariamente uguale a  $n$ ; B) maggiore di  $n$ ; C) necessariamente uguale a 1; D) uguale a 0 ;  
 E) Nessuna delle precedenti.
- 28) **C** Nelle disposizioni semplici , se  $k=n$  i gruppi che si potranno formare saranno uguali a :  
 A)  $n$ ;      B)  $k$ ;      C)  $n!$ ;      D)  $(n-k)!$ ;      E) Nessuna delle precedenti.
- 29) **A** Nelle combinazioni semplici , se  $k = n - 1$  , i gruppi che si potranno formare saranno uguali a :  
 A)  $n$ ;      B)  $k$ ;      C)  $n \cdot (n-1)$  ;      D) 1;      E) Nessuna delle precedenti.
- 30) **B** L'espressione  $D'_{2,3}$  si sviluppa come :  
 A) prodotto di 2 fattori entrambi uguali a 3;      B) prodotto di 3 fattori tutti uguali a 2;  
 C) prodotto di 3 fattori decrescenti partendo dal 3;      D) prodotto del numero 2 per il numero 3;  
 E) nessuna delle precedenti.
- 31) **D** L'espressione  $P^9_{10}$  è uguale a :  
 A)  $9!$ ;      B) 1;      C)  $10 \cdot (10-1)$  ;      D) 10;      E) nessuna delle precedenti.

32) D L'espressione  $\binom{90}{88}$  è uguale a :

- A) 90;    B) 2;    C) 88! ;    D) 4005;    E) nessuna delle precedenti.

33) C il simbolo k potrà essere maggiore di n :

- A) nelle disposizioni semplici;    B) nelle permutazioni semplici;  
 C) nelle disposizioni con ripetizione;    D) nelle combinazioni semplici;  
 E) nessuna delle precedenti.

C) **RISOLVERE I SEGUENTI PROBLEMI IMPOSTANDO E SVILUPPANDO LE FORMULE :**

num	esercizio	risoluzione						
34)	Quanti numeri di 3 cifre tutte distinte si possono formare con le cifre 2,4,6,8,10 ?	La cifra non si può ripetere , disposizioni semplici con $n = 5, k = 3 \quad D_{5,3} = 60$						
35)	Ad un torneo di tennis partecipano 10 giocatori, ciascuno dei quali deve battersi una sola volta con ognuno dei rimanenti. Quante partite si devono giocare?	Non conta l'ordine della coppia, sono pertanto combinazioni di 10 elementi presi 2 a 2 $n = 10, k = 2 \quad C_{10,2} = 45$						
36)	25 persone partecipano ad una festa; alla fine tutti si salutano con una stretta di mano. Quante strette di mano ci saranno?	Quante sono le combinazioni di 25 elementi presi a due a due . $\binom{25}{2} = 300$						
37)	Quanti anagrammi si possono formare con la parola OROSCOPO ?	$P_8^4 = \frac{8!}{4!} = 1.680$						
38)	Quanti anagrammi si possono formare con la parola BATTERIA ?	$P_8^{2,2} = \frac{8!}{2! \cdot 2!} = 10.080$						
39)	Per aprire una cassaforte occorre formare un numero di 5 cifre significative ( cifre da 0 a 9, escludendo lo 0 come prima cifra ) . Calcolare il numero di chiavi secondo le quali la cassaforte può essere bloccata.	La prima casella può essere occupata da 9 cifre, le altre 4 caselle dalle 10 cifre anche ripetute <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>1-9</td> <td>0-9</td> <td>0-9</td> <td>0-9</td> <td>0-9</td> </tr> </table> $9 \cdot D_{10,4} = 90.000$	1-9	0-9	0-9	0-9	0-9	
1-9	0-9	0-9	0-9	0-9				
40)	Quanti anagrammi si possono formare con la parola LEGGERE in modo che tutte iniziano con la lettera E ?	La prima casella è occupata dalla lettera E; le lettere a disposizione nelle altre caselle rappresentano delle permutazioni con ripetizione con le lettere E-G ripetute 2 volte. <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>E</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> $P_6^{2,2} = 180$	E					
E								

41)	Quanti anagrammi si possono formare con la parola LEGGERE in modo che tutte iniziano e terminano con la lettera E ?	<p>La prima e l'ultima casella sono occupate dalla lettera E; le lettere a disposizione nelle altre caselle rappresentano delle permutazioni con ripetizione con la lettera G ripetuta 2 volte.</p> <table border="1"> <tr> <td>E</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>E</td> </tr> </table> $P_5^2 = 60$	E						E								
E						E											
42)	Calcolare quanti numeri di 3 cifre si possono formare con i numeri 4,5,6,7,8,9 tenendo presente che essi debbono iniziare per 5 e che il numero 5 può ripetersi al secondo posto ma non al terzo.	<p>La prima casella è occupata dal numero 5 ; nella seconda casella possono essere inserite le sei cifre a disposizione , mentre nella terza solo le rimanenti 5 cifre. Il gruppo è espresso dal prodotto <math>1 \cdot 6 \cdot 5 = 30</math> .</p> <table border="1"> <tr> <td>5</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	5														
5																	
43)	Si lanciano due dadi .Calcolare il numero delle coppie possibili .	<p>Ciascuna delle facce si può ripetere; sono disposizioni con ripetizione .</p> $n = 6, k = 2 \quad D'_{6,2} = 36$															
44)	Si lanciano tre dadi .Calcolare il numero delle terne possibili .	$n = 6, k = 3 \quad D'_{6,3} = 216$															
45)	Si lanciano due dadi . Quante coppie hanno per somma delle facce un punteggio maggiore di 10?	<p>Le coppie sono 3:</p> <table border="1"> <tr> <td>5</td> <td>6</td> <td>Permutabile due volte</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>6</td> <td>Una sola coppia</td> </tr> </table>	5	6	Permutabile due volte	6	6	Una sola coppia									
5	6	Permutabile due volte															
6	6	Una sola coppia															
46)	<p>Si lanciano due dadi. Determinare :</p> <p>a) quante coppie presentano tutte e due le facce pari;</p> <p>b) quante coppie sono formate da numeri pari;</p> <p>c) quante coppie hanno per somma almeno il punteggio di 10?.</p>	<table border="1"> <tr> <td></td> <td></td> <td>Il lancio di due dadi forma una coppia</td> </tr> </table> <p>a) entrambe le caselle devono essere numeri pari , disposizione con ripetizione dei soli numeri pari , <math>D'_{3,2} = 9</math></p> <p>b) solo la seconda casella deve essere un numero pari , la prima può essere una delle 6 facce da associare alle 3 facce pari della seconda casella , <math>6 \times 3 = 18</math></p> <p>c) indicata con <math>X</math> la variabile somma deve essere <math>X \geq 10</math> che si ottiene dalle coppie:</p> <table border="1"> <tr> <td>4</td> <td>6</td> <td>Due coppie</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>5</td> <td>Una sola coppia</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>6</td> <td>Due coppie</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>6</td> <td>Una sola coppia</td> </tr> </table> $N = 6$			Il lancio di due dadi forma una coppia	4	6	Due coppie	5	5	Una sola coppia	5	6	Due coppie	6	6	Una sola coppia
		Il lancio di due dadi forma una coppia															
4	6	Due coppie															
5	5	Una sola coppia															
5	6	Due coppie															
6	6	Una sola coppia															

47)	<p>Si lanciano tre dadi. Determinare :</p> <p>a) quante terne presentano tutte e tre le facce pari;</p> <p>b) quante terne sono formate da numeri pari;</p> <p>c) quante terne hanno per somma 9</p>	<p>a) tutte le caselle devono essere numeri pari , disposizione con ripetizione dei soli numeri pari .  <math>n = 3, k = 3 \quad D_{3,3}' = 27</math></p> <p>b) solo la terza casella deve essere un numero pari , le prime due formano 36 coppie da associare alle 3 facce pari della terza casella , <math>D_{6,2}' \times 3 = 108</math></p> <p>c)</p> <table border="1" data-bbox="922 586 1369 779"> <tbody> <tr><td>1</td><td>2</td><td>6</td><td>Permutabile in sei modi</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>Permutabile in sei modi</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>Permutabile in 3 modi</td></tr> <tr><td>2</td><td>2</td><td>5</td><td>Permutabile in 3 modi</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>Permutabile in sei modi</td></tr> <tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>1 sola terna</td></tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;"><math>N = 25</math></p>	1	2	6	Permutabile in sei modi	1	3	5	Permutabile in sei modi	1	4	4	Permutabile in 3 modi	2	2	5	Permutabile in 3 modi	2	3	4	Permutabile in sei modi	3	3	3	1 sola terna
1	2	6	Permutabile in sei modi																							
1	3	5	Permutabile in sei modi																							
1	4	4	Permutabile in 3 modi																							
2	2	5	Permutabile in 3 modi																							
2	3	4	Permutabile in sei modi																							
3	3	3	1 sola terna																							
48)	<p>Si lanciano quattro dadi. Determinare :</p> <p>a) quante quaterne presentano tutte e quattro le facce pari;</p> <p>b) quante quaterne sono formate da numeri pari;</p> <p>c) quante quaterne hanno per somma almeno il punteggio di 23?.</p>	<p>a) <math>n = 3, k = 4 \quad D_{3,4}' = 81</math></p> <p>b) <math>D_{6,3}' \times 3 = 648</math></p> <p>c)</p> <table border="1" data-bbox="879 1258 1326 1326"> <tbody> <tr><td>5</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>Permutabile in 4 modi</td></tr> <tr><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>1 sola quaterna</td></tr> </tbody> </table> <p style="text-align: center;"><math>N = 5</math></p>	5	6	6	6	Permutabile in 4 modi	6	6	6	6	1 sola quaterna														
5	6	6	6	Permutabile in 4 modi																						
6	6	6	6	1 sola quaterna																						
49)	<p>In un'azienda turistica sono impiegate 30 persone, di cui 10 uomini. In quanti modi è possibile formare una rappresentanza sindacale con pari prerogative composta da 5 persone delle quali 3 siano donne?</p>	<p>La rappresentanza è una combinazione , non conta l'ordine ;  uomini <math>n = 10; k = 2</math>  donne <math>n = 20; k = 3</math> e associando i due collettivi si ottiene</p> $\binom{10}{2} \cdot \binom{20}{3} = 51.300$																								
50)	<p>Si deve scegliere una rappresentanza con pari prerogative di sette soci di un'associazione che ne conta 25. In quanti modi può essere scelta la rappresentanza se i due soci più anziani sono rappresentanti fissi?</p>	<p>I rappresentanti fissi formano una sola combinazione. Gli elementi a disposizione restano 23 ( 25-2) e la composizione dei gruppi da 5 soci ( 7-2), pertanto</p> $\binom{2}{2} \cdot \binom{23}{5} = 33.649$																								

51)	<p>Da un mazzo di 40 carte vengono estratte due. Calcolare quante coppie è possibile costituire nell'ipotesi che le carte vengono estratte:</p> <p>a) contemporaneamente;</p> <p>b) successivamente, con reimmissione della carta nel mazzo;</p> <p>c) successivamente, senza reimmissione della carta nel mazzo.</p>	<p>a) non conta l'ordine  <math>n = 40; k = 2 \quad C_{40,2} = 780</math></p> <p>b) la carta si può ripresentare, disposizioni con ripetizione  <math>n = 40; k = 2 \quad D'_{40,2} = 1.600</math></p> <p>c) le coppie si distinguono anche per l'ordine  <math>n = 40; k = 2 \quad D_{40,2} = 1.560</math></p>					
52)	<p>Si lanciano 5 monete . Calcolare il numero dei gruppi che si possono formare in modo che la faccia testa sia presente comunque nelle prime due estrazioni.</p>	<table border="1" data-bbox="874 810 1390 837"> <tr> <td>T</td> <td>T</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table> <p>Le tre caselle libere rappresentano delle disposizioni con ripetizione  <math>n = 2; k = 3 \quad D'_{2,3} = 8</math></p>	T	T			
T	T						
53)	<p>Si lanciano 5 monete . Calcolare il numero dei gruppi che si possono formare in modo che la faccia testa sia presente comunque nella prima e nelle ultime due estrazioni.</p>	<table border="1" data-bbox="874 1025 1390 1052"> <tr> <td>T</td> <td></td> <td></td> <td>T</td> <td>T</td> </tr> </table> <p>Le due caselle libere rappresentano delle disposizioni con ripetizione  <math>n = 2; k = 2 \quad D'_{2,2} = 4</math></p>	T			T	T
T			T	T			
54)	<p>Un'urna è composta da 10 palline rosse, 5 nere e 5 bianche. Si estraggono due palline contemporaneamente. Calcolare quante coppie di palline è possibile ottenere :</p> <p>a) di colore bianco ;</p> <p>b) di colore non rosso ;</p> <p>c) di uguale colore ;</p> <p>d) di diverso colore.</p>	<p>L'estrazione contemporanea esprime delle combinazioni.</p> <p>a) <math>n = 5; k = 2 \quad C_{5,2} = 10</math></p> <p>b) <math>n = 10; k = 2 \quad C_{10,2} = 45</math></p> <p>c) BB oppure NN oppure RR somma delle tre possibilità  <math display="block">\binom{5}{2} + \binom{5}{2} + \binom{10}{2} = 10 + 10 + 45 = 65</math></p> <p>d) NB oppure NR oppure BR senza permutazioni in quanto l'estrazione è in blocco ( contemporaneamente )  <math display="block">\binom{5}{1} \cdot \binom{5}{1} + \binom{5}{1} \cdot \binom{10}{1} + \binom{5}{1} \cdot \binom{10}{1} = 25 + 50 + 50 = 125</math></p>					

55)	Calcolare quanti ambi si possono formare con i 90 numeri a disposizione nel gioco del lotto.	Nel gioco del lotto l'ordine di presentazione dei numeri non conta . $n = 90; k = 2 \quad C_{90,2} = 4005$														
56)	Calcolare quante quintine si possono formare con i 90 numeri a disposizione nel gioco del lotto.	$n = 90; k = 5 \quad C_{90,5} = 43.949.268$														
57)	Ad un torneo di calcio partecipano 20 squadre. Calcolare il numero totale delle partite da disputare se per ogni coppia di squadra è prevista una partita di andata e un'altra di ritorno.	Sono disposizioni semplici $n = 20; k = 2 \quad D_{20,2} = 380$														
58)	Le targhe degli autoveicoli sono formate da lettere e cifre secondo la seguente tabella <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td colspan="2">lettere</td> <td colspan="3">numeri</td> <td colspan="2">lettere</td> </tr> <tr> <td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td><td> </td> </tr> </table> Sapendo che le lettere a disposizione sono 23 e le cifre 10 calcolare il numero di targhe possibili.	lettere		numeri			lettere									Sono disposizioni con ripetizione , supponiamo che esista anche la targa con tre zeri: $D'_{23,2} \cdot D'_{10,3} \cdot D'_{23,2} =$  279.841.000
lettere		numeri			lettere											

Bibliografia : Matematica con applicazioni informatiche , Gambotto, Manzone , Tramontana; Probabilità e statistica descrittiva Bergamini,Trifone,Barozzi, Zanichelli; La Matematica nell'economia e nella finanza 2 Coeli, Falamischia, Minerva.